Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (35%)
SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2004

s o l u c i o n e s **tipo A**

1.- Para cada uno de los límites siguientes, calcúlelo en el caso que exista o demuestre que no existe (en el caso que no exista) :

a) (3 ptos.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{1+3|x|}-1}$;

b) (3 ptos.) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x+2\pi)}$;

c) (3 ptos.) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+5x+3}-x)$.

a) $\dfrac{|x|}{\sqrt{1+3|x|}-1} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+3|x|}-1}\,\dfrac{(\sqrt{1+3|x|}+1)}{(\sqrt{1+3|x|}+1)} = \dfrac{|x|(\sqrt{1+3|x|}+1)}{(1+3|x|-1)} = \dfrac{\sqrt{1+3|x|}+1}{3}$,

por lo cual $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{1+3|x|}-1} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3|x|}+1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

b) poniendo u = x-1 , se tiene : $\operatorname{sen}(\pi x+2\pi) = \operatorname{sen}(\pi u+3\pi) = -\operatorname{sen}(\pi u)$, luego :

$\dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x+2\pi)} = \dfrac{(-1)u(u+2)}{-\operatorname{sen}(\pi u)} = \dfrac{u(u+2)}{\operatorname{sen}(\pi u)} = \dfrac{\pi u}{\operatorname{sen}(\pi u)}\,\dfrac{u+2}{\pi}$ por lo cual :

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x+2\pi)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\pi u}{\operatorname{sen}(\pi u)}\,\dfrac{u+2}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

c) $\sqrt{x^2+5x+3}-x = (\sqrt{x^2+5x+3}-x)\,\dfrac{\sqrt{x^2+5x+3}+x}{\sqrt{x^2+5x+3}+x} = \dfrac{(x^2+5x+3)-x^2}{\sqrt{x^2+5x+3}+x} =$

$= \dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+5x+3}+x} = \dfrac{5+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$ por lo cual : $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+5x+3}-x) = \dfrac{5}{2}$.

2.- (9 ptos.) Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 \text{ , si } x < -1 \\ ax+b \text{ , si } -1 \le x \le 2 \\ x^2-3x+5\text{, si } x > 2 \end{cases}$;

2a) halle valores de las constantes a, b de manera que f sea continua. Justifique ;

2b) con los valores para a, b , hallados en 2a) estudie la derivabilidad de f en todo su dominio.

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (1-x^2) = 0$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (ax+b) = -a+b$, luego para que exista $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ debe ser 0 = -a+b ; además f(-1) = -a+b por lo cual si -a+b=0 entonces f es continua en x= -1 .

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (35%)
SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2004

s o l u c i o n e s **tipo A**

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax+b) = 2a+b$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (x^2 -3x + 5) = 4-6+5 = 3$ luego para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ debe ser $2a+b = 3$; además $f(2) = 2a+b$ por lo cual si $2a+b= 3$ entonces f es continua en x=2 .

Para que f sea continua en -1 y 2 se debe tener : $\begin{cases} a-b = 0 \\ 2a+b= 3 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$.

Es <u>importante</u> observar que siendo $1-x^2$, $ax+b$, x^2-3x+5 polinomios, la continuidad de f en $(-\infty. -1)\cup(-1, 2)\cup(2, +\infty)$ sigue de los teoremas sobre continuidad que se han estudiado.

Análogamente es <u>importante</u> observar que teoremas conocidos sobre derivadas aseguran la derivabilidad de f en todo el conjunto $(-\infty. -1)\cup(-1, 2)\cup(2, +\infty)$.

Queda entonces solamente averiguar , siendo a=b=1 , $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 \ , \text{ si } x < -1 \\ x+1 \ , \text{ si } -1\le x \le 2 \\ x^2 -3x + 5, \text{ si } x > 2 \end{cases}$

si f es derivable para x=-1 y para x=2 .

2b-i) Derivabilidad en x= -1 : $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{1-(-1+h)^2- 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{2h-h^2}{h} = 2$;

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{(-1+h)+1}{h} = 1$; como se tiene :

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \neq \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ <u>no existe</u> y por lo tanto f <u>no es derivable</u> en x=-1 .

2b-ii) Derivabilidad en x= 2 : $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{((2+h)+1)-3}{h} = 1$;

$\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{((2+h)^2-3(2+h)+5) - 3}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{4h+h^2-3h}{h} = 1$; en este caso los dos límites laterales son iguales y por lo tanto $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = 1$,

por lo cual $f'(2)= 1$.
En conclusión f es derivable en todos los reales, con <u>excepción</u> de x= -1.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (35%)
SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2004

s o l u c i o n e s **tipo A**

3.- (7 ptos.) Diga, justificando, si la ecuación :

$x + 3 +2.\text{sen}(x) = 0$ tiene alguna solución real.

La función definida por $f(x) = x + 3 +2.\text{sen}(x)$ es continua en todos los reales (y por lo tanto en todo intervalo [a, b]);
por lo tanto es suficiente hallar dos números a, b tales que f(a), f(b) tengan valores de signo opuesto y luego aplicar el teorema del valor intermedio (Bolzano) a la función f en el intervalo [a, b] hallado.
Como para todo valor de x se tiene $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$, resulta $1 \leq 3+2\text{sen}(x) \leq 5$ y por lo tanto evidentemente $f(-6) = 3+2\text{sen}(-6) -6 < 0$, $f(0) = 3 > 0$;
si aplicamos entonces el teorema del valor intermedio a la función f en el intervalo [-6, 0] se tiene que en almenos un punto, $c\in (-6,0)$ $f(c)= 0$ y el número c será solución de la ecuación dada.
También se pueden usar otros intervalos, por ejemplo : $[-\pi , 0]$.

4.- (7 ptos.) Sea g la función definida por : $g(x) = \dfrac{2x.\cos(x)}{3x+\text{sen}(x)}$;

4a) halle la derivada de g ;

4b) halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g , en el punto $A(\pi, -\frac{2}{3})$.

4a) $g'(x) = \dfrac{(2.\cos(x)-2x.\text{sen}(x))(3x+\text{sen}(x)) - (3+\cos(x))(2x.\cos(x))}{(3x+\text{sen}(x))^2} =$

$= \dfrac{-6x^2\text{sen}(x)+2\text{sen}(x)\cos(x)-2x}{(3x+\text{sen}(x))^2}$.

4b) $g'(\pi) = \dfrac{-2\pi}{(3\pi)^2} = \dfrac{-2}{9\pi}$; ecuación de la recta tangente pedida :

$\dfrac{y+\frac{2}{3}}{x-\pi} = \dfrac{-2}{9\pi}$; $2x+9\pi y+4\pi =0$.

5.- (3 ptos.) Halle la derivada de la función definida por : $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}(\sqrt{x})+\cos^2(x)}$.

$$f'(x) = (-1)\,(\text{sen}(\sqrt{x})+\cos^2(x))^{-2}\left(\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2\,\text{sen}(x)\cos(x)\right) = \frac{2\,\text{sen}(x)\cos(x) - \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{(\text{sen}(\sqrt{x})+\cos^2(x))^2} .$$

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (35%)
SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2004

s o l u c i o n e s **tipo B**

1.- Para cada uno de los límites siguientes, calcúlelo en el caso que exista o demuestre que no existe (en el caso que no exista) :

a) (3 ptos.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{1+5|x|}-1}$;

b) (3 ptos.) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\mathrm{sen}(\pi x-2\pi)}$.

c) (3 ptos.) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3x+5}-x)$.

a) $\dfrac{|x|}{\sqrt{1+5|x|}-1} = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+5|x|}-1}\dfrac{(\sqrt{1+5|x|}+1)}{(\sqrt{1+5|x|}+1)} = \dfrac{|x|(\sqrt{1+5|x|}+1)}{(1+5|x|-1)} = \dfrac{\sqrt{1+5|x|}+1}{5}$,

por lo cual $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{\sqrt{1+5|x|}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5|x|}+1}{5} = \dfrac{2}{5}$.

b) poniendo u = x-1 , se tiene : $\mathrm{sen}(\pi x-2\pi) = \mathrm{sen}(\pi u-\pi) = -\,\mathrm{sen}(\pi u)$, luego :

$\dfrac{1-x^2}{\mathrm{sen}(\pi x-2\pi)} = \dfrac{(-1)u(u+2)}{-\mathrm{sen}(\pi u)} = \dfrac{u(u+2)}{\mathrm{sen}(\pi u)} = \dfrac{\pi u}{\mathrm{sen}(\pi u)}\,\dfrac{u+2}{\pi}$ por lo cual :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\mathrm{sen}(\pi x-2\pi)} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\pi u}{\mathrm{sen}(\pi u)}\,\dfrac{u+2}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

c) $\sqrt{x^2+3x+5}-x = (\sqrt{x^2+3x+5}-x)\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}+x}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} = \dfrac{(x^2+3x+5)-x^2}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} =$

$= \dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2+3x+5}+x} = \dfrac{3+\frac{5}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}+1}$ por lo cual : $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+5}-x) = \dfrac{3}{2}$.

2.- (9 ptos.) Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 \text{ , si } x < -2 \\ ax+b \text{ , si } -2\le x \le 1 \\ x^2-x+3, \text{ si } x > 1 \end{cases}$;

2a) halle valores de las constantes a, b de manera que f sea continua. Justifique;

2b) con los valores para a, b , hallados en 2a) estudie la derivabilidad de f en todo su dominio.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-}(4-x^2) = 0$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+}(ax+b) = -2a+b$, luego para que exista $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ debe ser 0 = -2a+b ; además f(-2) = -2a+b por lo cual si -2a+b=0 entonces f es continua en x= -2 .

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(ax+b) = a+b$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-x+3) = 3$ luego para que exista

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (35%)
SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2004

s o l u c i o n e s **tipo B**

$\lim_{x\to 1} f(x)$ debe ser $a+b = 3$; además $f(1) = a+b$ por lo cual si $a+b= 3$ entonces f es continua en x=1 .

Para que f sea continua en -2 y 1 se debe tener : $\begin{cases} 2a-b = 0 \\ a+b= 3 \end{cases} \Rightarrow$ a=1 , b= 2.

Es <u>importante</u> observar que siendo $4-x^2$, $ax+b$, x^2-x+3 polinomios, la continuidad de f en $(-\infty. -2)\cup(-2, 1)\cup(1, +\infty)$ sigue de los teoremas sobre continuidad que se han estudiado.

Análogamente es <u>importante</u> observar que teoremas conocidos sobre derivadas aseguran la derivabilidad de f en todo el conjunto $(-\infty. -2)\cup(-2, 1)\cup(1, +\infty)$.

Queda entonces solamente averiguar , siendo a=1 ,b=2, $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 \text{ , si } x < -2 \\ x+2 \text{ , si } -2\leq x \leq 1 \\ x^2 -x + 3\text{, si } x > 1 \end{cases}$

si f es derivable para x=-2 y para x=1 .

2b-i) Derivabilidad en x= -2 : $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4-(-2+h)^2- 0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4h-h^2}{h} = 4$;

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(-2+h)+2}{h} = 1$; como se tiene :

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ el límite $\lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$ <u>no existe</u> y por lo tanto f <u>no es derivable</u> en x=-2 .

2b-ii) Derivabilidad en x= 1 : $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{((1+h)+2)-3}{h} = 1$;

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{((1+h)^2-(1+h)+3) - 3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h+h^2-h}{h} = 1$; en este caso los dos límites laterales son iguales y por lo tanto $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 1$,
por lo cual f '(1)= 1.
En conclusión f es derivable en todos los reales, con <u>excepción</u> de x= -2.

Universidad Simón Bolívar
Depto. de Matemáticas
Puras y Aplicadas

MA1111 SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (35%)
SEPTIEMBRE-DICIEMBRE DE 2004

s o l u c i o n e s **tipo B**

3.- (7 ptos.) Diga, justificando, si la ecuación :

$x + 2 - 3.\text{sen}(x) = 0$ tiene alguna solución real.

La función definida por $f(x) = x + 2 - 3.\text{sen}(x)$ es continua en todos los reales (y por lo tanto en todo intervalo [a, b]);
por lo tanto es suficiente hallar dos números a, b tales que f(a), f(b) tengan valores de signo opuesto y luego aplicar el teorema del valor intermedio (Bolzano) a la función f en el intervalo [a, b] hallado.
Como para todo valor de x se tiene $-1 \le \text{sen}(x) \le 1$, resulta $-1 \le 2- 3\text{sen}(x) \le 5$ y por lo tanto evidentemente $f(-6) = 2- 3\text{sen}(-6) - 6 < 0$, $f(0) = 2 > 0$;
si aplicamos entonces el teorema del valor intermedio a la función f en el intervalo [-6, 0] se tiene que en almenos un punto, $c \in (-6,0)$ $f(c)= 0$ y el número c será solución de la ecuación dada.
También se pueden usar otros intervalos, por ejemplo : $[-\pi, 0]$.

4.- (7 ptos.) Sea g la función definida por : $g(x) = \dfrac{3x.\cos(x)}{2x+\text{sen}(x)}$;

a) halle la derivada de g ;

b) halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g , en el punto $A(\pi, -\frac{3}{2})$.

4a) $g'(x) = \dfrac{(3.\cos(x)-3x.\text{sen}(x))(2x+\text{sen}(x)) - (2+\cos(x))(3x.\cos(x))}{(2x+\text{sen}(x))^2} =$

$= \dfrac{-6x^2\text{sen}(x)+3\text{sen}(x)\cos(x)-3x}{(2x+\text{sen}(x))^2}$.

4b) $g'(\pi) = \dfrac{-3\pi}{(2\pi)^2} = \dfrac{-3}{4\pi}$; ecuación de la recta tangente pedida :

$\dfrac{y+\frac{3}{2}}{x-\pi} = \dfrac{-3}{4\pi}$; $3x+4\pi y+3\pi = 0$.

5.- (3 ptos.) Halle la derivada de la función definida por : $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen}^2(x)+\cos(\sqrt{x})}$.

$$f'(x) = (-1)\,(\text{sen}^2(x)+\cos(\sqrt{x})^{-2}\Big(2\,\text{sen}(x)\cos(x) - \frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}\Big) = \frac{\dfrac{\text{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} - 2\,\text{sen}(x)\cos(x)}{(\text{sen}^2(x)+\cos(\sqrt{x}))^2} .$$